



# Intervalles interbattements cardiaques et Processus Auto-Régulé Multifractionnaire

Olivier Barrière, Jacques Lévy Véhel

## ► To cite this version:

Olivier Barrière, Jacques Lévy Véhel. Intervalles interbattements cardiaques et Processus Auto-Régulé Multifractionnaire. Journal de la Societe Française de Statistique, 2009, 150 (1), pp.54-72. inria-00539043

**HAL Id: inria-00539043**

**<https://inria.hal.science/inria-00539043>**

Submitted on 23 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Intervalles interbattements cardiaques et Processus Auto-Régulé Multifractionnaire

Olivier Barrière<sup>1</sup> et Jacques Lévy Véhel<sup>2</sup>

## Title

Application of the Self Regulating Multifractional Process to cardiac interbeats intervals

## Résumé

Nous étudions à l'aide des exposants de Hölder la régularité locale des intervalles RR (intervalles temporels entre deux pics R successifs d'un ECG). Ces exposants sont un des piliers de l'analyse multifractale et ont déjà prouvé leur efficacité dans l'étude des données cardiaques. Nous cherchons ici à estimer la régularité locale en tout point des signaux RR, contrairement au spectre multifractal qui ne mesure que sa distribution globale. Il apparaît alors une caractéristique jusqu'alors inédite : on remarque une forte corrélation négative entre les valeurs du signal et sa régularité. En d'autres termes, plus le coeur bat lentement (la nuit par exemple) et plus il bat irrégulièrement. Nous introduisons un nouveau modèle stochastique, le Processus Auto-Régulé Multifractionnaire (PARM) afin de modéliser ce phénomène. Il s'agit d'aller plus loin que le simple mouvement Brownien multifractionnaire et de proposer un processus dont la régularité n'est plus une fonction exogène du temps, mais est en relation fonctionnelle avec l'amplitude du processus elle-même. Nous étudions l'application du PARM pour la modélisation des intervalles RR.

**Mots-clés :** Régularité locale, processus auto-régulé, ECG, intervalles inter-battements.

## Abstract

We analyze the local regularity of RR traces from ECG through the computation of the so-called Hölder exponents. These exponents are at the basis of multifractal analysis, which has been shown to be relevant in the study of RR data. While multifractal analysis yields a global picture of the distribution of regularity, we focus here on its time evolution. We show that this evolution is strongly negatively correlated with the signal itself, a feature that seems to have remained unnoticed so far. In other words, when the heart beats slowly, it is more irregular than when it beats rapidly. In order to account for this fact, we propose a new stochastic model, called Self-Regulating Multifractional Process : contrarily to multifractional Brownian motion, whose the local regularity depends on time, the regularity here is a function of the amplitude of the process itself. We use this new model to build more realistic synthetic RR traces.

**Keywords :** Local regularity, self-regulating process, ECG, RR-intervals.

**Mathematics Subject Classification:** (60G15, 60G17, 60G18)

---

<sup>1</sup>INRIA Saclay, [olivier.barriere@inria.fr](mailto:olivier.barriere@inria.fr)

<sup>2</sup>INRIA Saclay, [Jacques.Levy-Vehel@inria.fr](mailto:Jacques.Levy-Vehel@inria.fr)

# 1 Introduction et motivations

De nombreux phénomènes naturels, en particulier en physique, biologie et médecine, présentent des propriétés fractales. La modélisation de tels phénomènes, grâce à l'analyse fractale, a pour but de comprendre plus finement les interactions complexes régissant ces processus.

Ceci s'illustre par exemple dans le domaine biomédical par l'étude des ECG, dont on déduit les intervalles RR (intervalles temporels entre deux pics R successifs). Ces intervalles RR ont largement été utilisés pour détecter diverses pathologies du coeur, telles que l'insuffisance cardiaque congestive ou le syndrome d'apnées/hypopnée du sommeil. Le caractère fractal de ces données n'est plus à démontrer : plusieurs travaux mettent en évidence que des paramètres fractals tel que la dimension de boîte sont corrélés avec les conditions cardiaques dans certaines situations ([15, 18]).

Plus précise que la simple analyse fractale, l'analyse *multifractale* a pour but l'étude de signaux ou fonctions dont la régularité ponctuelle peut varier d'un point à un autre. Elle fournit une description à la fois locale et globale des singularités : la première est obtenue via l'exposant de Hölder et la seconde grâce aux spectres multifractals. Ceux-ci caractérisent de façon géométrique ou statistique la répartition de la régularité locale.

Il arrive que la fonction de Hölder soit très simple alors que le signal est irrégulier. C'est le cas par exemple pour le mouvement Brownien fractionnaire, qui n'est nulle part dérivable, mais dont la fonction de Hölder est constante. Il existe aussi des signaux, d'apparence très irrégulière, pour lesquels la fonction de Hölder est elle-même encore plus irrégulière. C'est le cas en particulier des signaux multifractals. Un comportement multifractal est souvent le résultat d'interactions complexes d'un grand nombre d'éléments, dont chacun agit de façon relativement simple, ce qui est un cas de figure fréquent dans le domaine biomédical. En ce qui concerne les intervalles RR, l'analyse multifractale a permis de mettre en évidence que les données de patients sains présentent un caractère multifractal affirmé, dû aux systèmes sympathiques et parasympathiques qui s'affrontent en permanence ([9, 10, 13]). Par contre, chez les patients atteints d'insuffisances cardiaques, qui présentent des troubles de la régulation de la fréquence cardiaque et pour qui l'un des deux systèmes domine, ce caractère multifractal diminue ou disparaît. En résumé, un coeur sain présente un large spectre multifractal, alors que celui d'un coeur atteint de certaines pathologies est beaucoup plus restreint, tout en présentant une régularité locale plus élevée en moyenne. De fait, l'irrégularité des battements cardiaques est un signe de bonne santé, preuve que les interactions entre le système nerveux central et le coeur fonctionnent correctement.

Notre but dans cet article est d'analyser plus finement l'évolution temporelle de la régularité locale, et de proposer un modèle stochastique permettant de rendre compte de cette évolution. Dans le paragraphe 2, nous commençons par passer en revue les outils de base que nous utiliserons : exposant de Hölder ponctuel, mouvement Brownien multifractionnaire, processus multifractionnaire avec exposant aléatoire, et estimation statistique. Le paragraphe 3 présente les données sur lesquelles nous travaillons. Nous introduisons dans le paragraphe 4 un nouveau processus, le *PARM*, qui permet, au paragraphe 5, une modélisation fine des RR. Enfin, le paragraphe 6 propose brièvement quelques perspectives.

## 2 Rappels : exposant de Hölder, mouvement Brownien multifractionnaire, et estimation

### 2.1 Régularité locale

L'exposant de Hölder est l'outil mathématique le plus couramment utilisé pour mesurer la régularité d'un signal en un point. Pour un processus stochastique  $X$  dont les trajectoires sont continues mais nulle part différentiables, il est défini par :

$$\alpha_X(t_0) = \sup \left\{ \alpha, \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|X(t_0 + h) - X(t_0)|}{|h|^\alpha} = 0 \right\}.$$

En général,  $\alpha_X$  est lui-même un processus stochastique, mais, en particulier si  $X$  est gaussien, on peut montrer qu'il prend en fait une valeur presque sûre en chaque point. Géométriquement, cette définition signifie que le graphe de  $X$  autour de  $t_0$  s'inscrit dans une "enveloppe Hölderienne" représentée sur la figure 1 telle que plus  $\alpha_X(t_0)$  est grand, plus le signal est lisse en  $t_0$  et inversement. Par exemple,  $X$  continue implique  $\alpha_X(t_0) \geq 0$  et  $X$  dérivable implique  $\alpha_X(t_0) \geq 1$ . Il s'agit d'une généralisation de la notion de dérivée qui introduit un coefficient donnant en tout point une mesure de la régularité, toujours défini et calculable. Enfin, cet exposant de Hölder étant défini en tout point, on peut associer au signal sa fonction de Hölder.

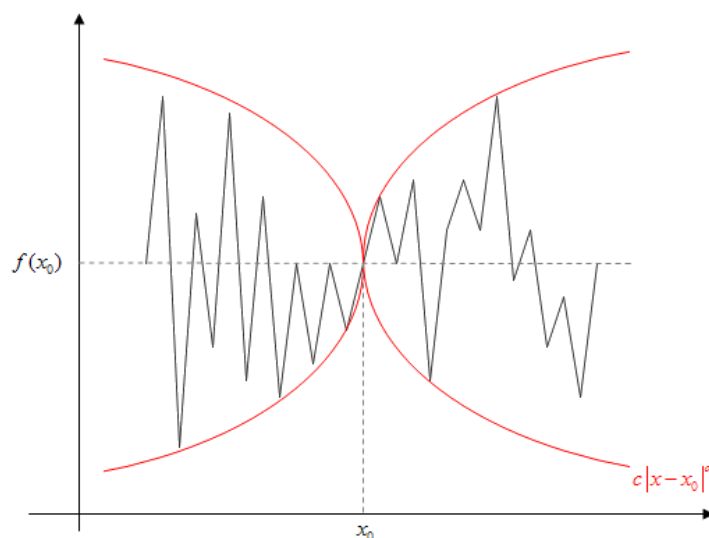


FIGURE 1 – Enveloppe Hölderienne d'un signal au point  $t_0$ .

### 2.2 Processus à régularité prescrite

Parmi les processus stochastiques à régularité prescrite, l'exemple le plus simple est peut-être le mouvement Brownien fractionnaire ( $fBm$ ), [11, 12], paramétré par l'exposant de Hurst  $H$ , et dont les trajectoires ont une régularité locale constante presque sûrement égale à  $H$  partout. Le mouvement Brownien multifractionnaire ( $mBm$ ) a été introduit pour pallier cette limitation, en remplaçant la constante  $H$  par une fonction  $t \mapsto H(t)$ , suffisamment régulière [6, 14].

Nous le noterons ici  $\{B_{H(t)}(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ . C'est le processus Gaussien, centré, nul à l'origine, dont la fonction de covariance est donnée par :

$$\mathbb{E}(B_{H_1}(t_1)B_{H_2}(t_2)) \propto (|t_1|^{H_1+H_2} + |t_2|^{H_1+H_2} - |t_1 - t_2|^{H_1+H_2}),$$

où  $H_1 = H(t_1)$  et  $H_2 = H(t_2)$ .

Sa régularité Höldérienne est prescrite par la fonction  $H(\cdot)$  et vérifie en tout point  $t$  :

$$\alpha_{B_{H(t)}}(t, \omega) = \min(H(t), \alpha_H(t)), \text{ presque sûrement}$$

dès que  $H$  a lui-même une régularité Höldérienne globale strictement positive. Dans le cas où, par exemple, la fonction  $H$  est  $C^1$ ,  $H(t)$  est par conséquent presque sûrement l'exposant de Hölder ponctuel au point  $t$ . La fonction  $H$  permet ainsi de prescrire de façon exogène la régularité du processus : plus elle se rapproche de 1 et plus la trajectoire est localement lisse. Réciproquement, plus elle se rapproche de 0 et plus la trajectoire est localement irrégulière. Plusieurs méthodes de synthèse de ce processus existent dans la littérature : une méthode à la fois rapide et efficace, fondée sur la simulation préalable d'un petit nombre de fBm suivie d'une phase de krigeage a été proposée par Chan et Wood [7]. Cette méthode a ensuite été perfectionnée dans [5] en rajoutant une étape préliminaire afin d'optimiser le choix des fBms à simuler et est disponible dans la boîte à outils d'analyse fractale FracLab [8] développée à l'INRIA. La figure 2 représente des trajectoires simulées pour différentes fonctions  $H$ .

La fonction déterministe  $H$  paramétrant le mBm peut elle-même être remplacée par un processus stochastique  $\{S(t, \omega)\}_{t \in [0,1]}$ . Cette extension, appelée Processus multifractionnaire avec exposant aléatoire - *Multifractional Process with Random Exponent - MPRE*, et que nous noterons  $\{X(t, \omega)\}_{t \in [0,1]}$  a été proposée dans [3]. Ce processus repose sur :

- $\{B_H(t, \omega)\}_{(t,H) \in [0,1] \times [a,b]}$ , un champ Gaussien de fBms, défini sur  $[0,1] \times [a,b]$  où  $0 < a < b < 1$ .
- $\{S(t, \omega)\}_{t \in [0,1]}$ , un processus stochastique à valeurs dans  $[a,b]$ .

Pour tout  $t$  et tout  $\omega$ , le MPRE  $\{X(t, \omega)\}_{t \in [0,1]}$  est défini par :

$$X(t, \omega) = B_{S(t, \omega)}(t, \omega).$$

En ce qui concerne la régularité globale et locale du MPRE, il faut préalablement imposer une condition technique  $\mathcal{C}$  sur  $\beta_S([0,1])$ , l'exposant de Hölder uniforme sur  $[0,1]$  du processus  $\{S(t, \omega)\}_{t \in [0,1]}$ . Elle spécifie qu'avec une probabilité 1 :

$$\mathcal{C} : \sup_{t \in [0,1]} S(t, \omega) < \beta_S([0,1], \omega). \quad (1)$$

Sous cette hypothèse et pour tout  $t_0$  dans  $[0,1]$ , l'exposant de Hölder de  $X$  au point  $t_0$  est presque sûrement égal à la valeur de  $S$  en ce même point :

$$\alpha_X(t_0, \omega) = S(t_0, \omega).$$

## 2.3 Estimation de la régularité locale

Le mBm est, à une constante multiplicative près, complètement déterminé par son paramètre fonctionnel  $H$ . Il est parfois intéressant de considérer un processus un peu plus général défini

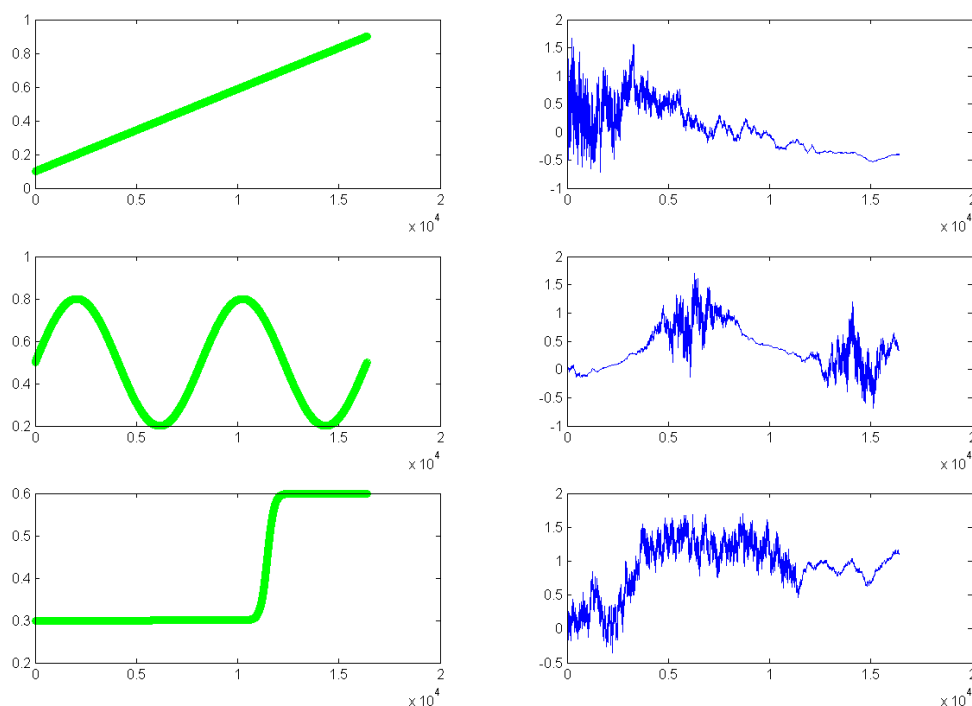


FIGURE 2 – Trajectoires de mouvements Browniens multifractionnaires (à droite) pour différentes fonctions  $H$  (à gauche) : linéaire, périodique et logistique

comme  $G(t)B_{H(t)}(t)$ , où  $G$  est une fonction déterministe lisse (au moins  $C^1$ ). Un tel modèle permet de prendre en compte les tendances, comportements périodiques, et autres caractéristiques de phénomènes naturels. Afin d'utiliser ce mBm modifié comme un modèle pour les séries temporelles d'intervalles RR, il convient d'estimer à la fois  $H$  et  $G$ .

Le paramètre  $H$  est estimé via le calcul des "Variations Quadratiques Généralisées" (*Generalized Quadratic Variations - GQV*), définies comme suit.

Pour tout  $N \geq 1$ , soit  $\{X(\frac{p}{N}); p \in \{0, \dots, N-1\}\}$  une trajectoire discrétisée d'un processus  $\{X(t)\}_{t \in [0,1]}$ . Les GQV sont les quantités :

$$\tilde{V}_N(t) = \sum_{p \in \tilde{\nu}_N(t)} \left( X\left(\frac{p}{N^\delta}\right) - 2X\left(\frac{p+1}{N^\delta}\right) + X\left(\frac{p+2}{N^\delta}\right) \right)^2.$$

où  $\tilde{\nu}_N(t) = \{p \in \mathbb{N}; 0 \leq p \leq N-2 \text{ et } |t - \frac{p}{N^\delta}| \leq N^{-\gamma}\}$ . Il a été montré dans [2] que sous des hypothèses techniques concernant  $\delta$  et  $\gamma$ , on obtient presque sûrement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\delta} \left( (1 - \gamma) - \frac{\log \tilde{V}_N(t)}{\log N} \right) = H(t).$$

Il en découle un estimateur basique  $\hat{H}_N$  qui se montre très efficace quand on observe un

mouvement Brownien standard, *c.à.d* quand  $G \equiv 1$ , mais présente dans le cas général un décalage  $\Delta_G(t) = -\frac{\log G(t)}{\delta \log N}$ .

Afin d'éliminer ce biais, on procède classiquement à une régression linéaire aux moindres carrés de  $\log \tilde{V}_N$  en fonction de  $\log N$ . Ce nouvel estimateur  $\hat{H}_{reg}$  ne présente plus de décalage, mais au prix d'une augmentation non négligeable de la variance. Nous utilisons alors une méthode hybride permettant de diminuer la variance sans augmenter le biais. Cette technique consiste en un simple alignement de la moyenne temporelle du premier estimateur sur celle du second et est décrite en détails dans [5]. Le biais déterministe dû à  $G$  est alors éliminé et la variance reste faible. Enfin, on se sert du décalage entre  $\hat{H}_{reg}$  et  $\hat{H}_N$  pour estimer  $G$ .

La figure 3 illustre des exemples d'estimation de la fonction  $H$  pour des trajectoires de mBm. La régularité théorique est en vert et celle estimée est en bleu, et les deux se superposent presque parfaitement.

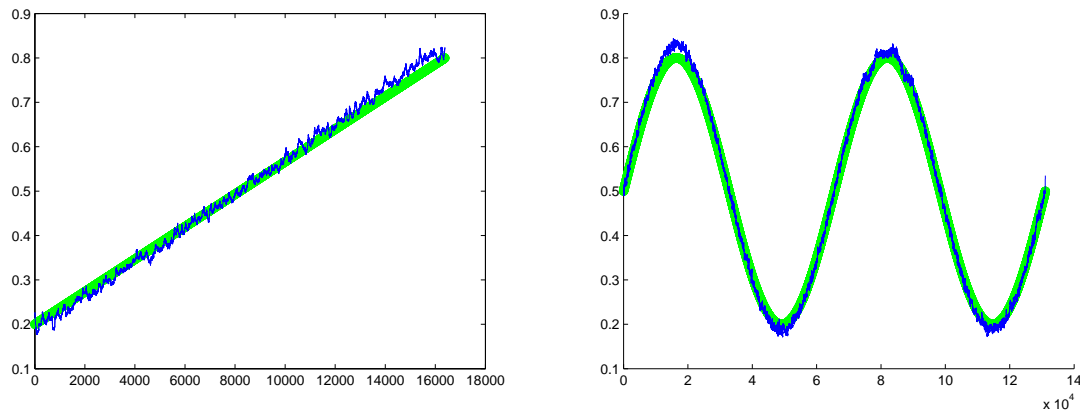
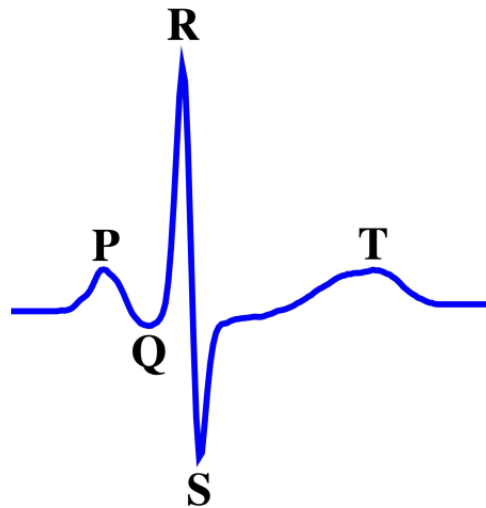


FIGURE 3 – Estimation de la régularité locale de trajectoires de mBms. A gauche, une fonction  $H$  linéaire et à droite une fonction  $H$  périodique

### 3 Intervalles RR

Les courants électriques qui circulent dans le cœur entraînent des potentiels électriques et sont responsables de l'activité musculaire cardiaque. Ces potentiels électriques font apparaître cinq déflexions nommées P, Q, R, S et T, représentées sur la figure 4. L'onde P correspond à la dépolarisation (et la contraction) des oreillettes. Vient ensuite l'onde QRS (appelé aussi complexe QRS) qui correspond à la dépolarisation (et la contraction) des ventricules. Enfin, l'onde T correspond à l'essentiel de la repolarisation (la relaxation) des ventricules. Voir [17] pour plus de détails sur les signaux ECG.

La variabilité cardiaque est définie comme la variation de l'intervalle de temps séparant deux battements consécutifs. La détection des battements nécessite l'analyse du signal ECG et plus particulièrement l'identification de l'onde R, la plus marquée du complexe QRS. On obtient ainsi les durées successives des intervalles "RR" qui sont inversement proportionnelles aux fréquences cardiaques instantanées.

FIGURE 4 – Ondes *P*, *Q*, *R*, *S* et *T*

Grâce au Holter cardiaque, un dispositif portable permettant l'enregistrement en continu de l'électrocardiogramme, on peut enregistrer de manière numérique des ECG sur une journée complète. On peut ainsi extraire du signal d'ECG la série temporelle des intervalles interbattements qui mesure alors l'évolution du rythme cardiaque au cours du temps. Sur 24h, cela représente des signaux d'environ 100000 points, appelés *RRi* (*RR intervals*) que nous étudions ici. En voici un exemple sur la figure 5, sur laquelle on distingue clairement la période nocturne, correspondant à un rythme cardiaque plus lent, et par conséquent à des intervalles interbattements plus importants.

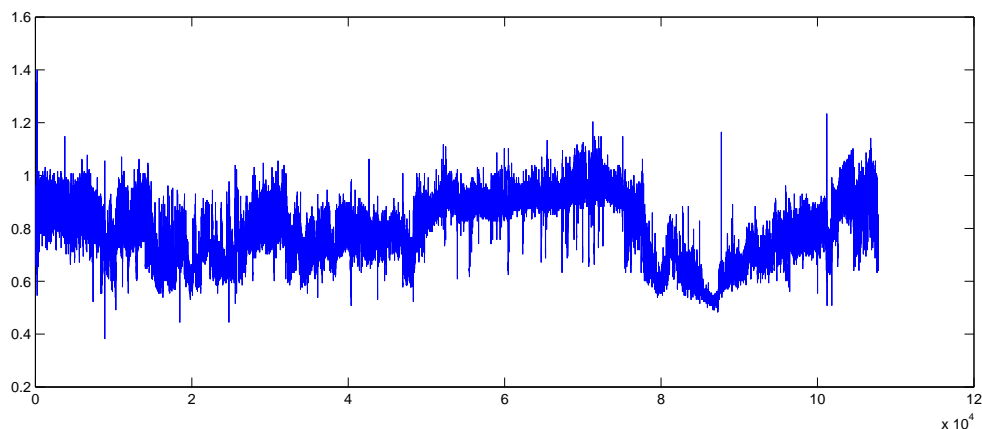


FIGURE 5 – Intervalles entre deux battements cardiaques successifs

La figure 6 représente des séries temporelles d'intervalles *RR* pour différents patients sains (une trentaine d'adultes entre 20 et 50 ans), tirés de la base de données PhysioNet [16] qui offre un accès à un grand nombre de signaux physiologiques. Pour chaque enregistrement, nous avons estimé l'exposant de Hölder d'après la méthode décrite dans la section 2.3. On remarque



clairement un “effet miroir” entre la séquence des intervalles entre deux battements (en haut) et leur régularité estimée (en bas) : par exemple, les zones où le coeur bat plus lentement (qui correspondent au sommeil) coïncident clairement avec les zones où la régularité est la plus faible.

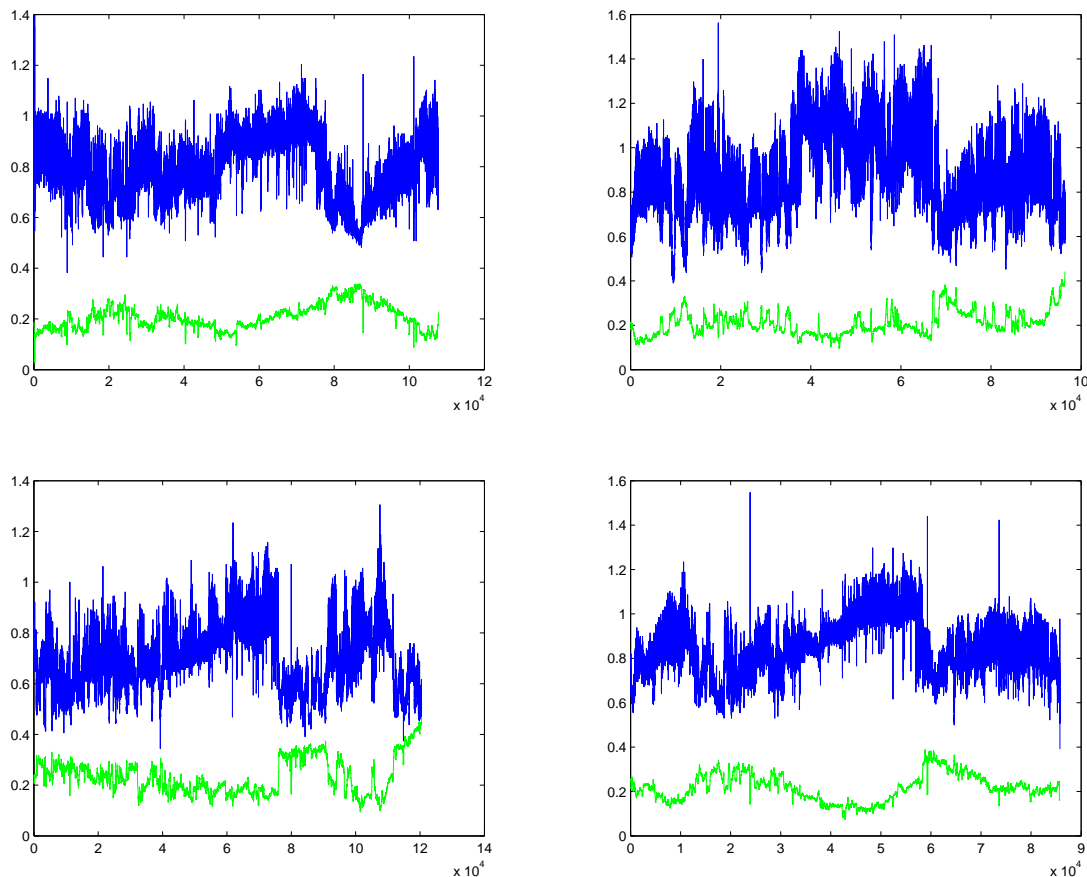


FIGURE 6 – *Intervalles entre deux battements cardiaques successifs (en haut) et exposant de Hölder estimé (en bas)*

## 4 Processus Auto-Regulé Multifractionnaire

La propriété remarquée sur les RRI s’observe aussi sur d’autres phénomènes naturels, comme des données climatologiques (relevés de températures quotidiens sur différentes stations météo) ou des données géographiques. Dans ce dernier cas, il est clair que ce qui détermine la régularité d’une zone terrestre n’est pas vraiment sa position spatiale, mais plutôt son altitude : un terrain montagneux dont l’altitude est élevée est typiquement plus irrégulier qu’un terrain de plaine, d’où la relation, en chaque point, entre amplitude et régularité. Pour rendre compte de ce type de phénomène, nous proposons un raffinement du mBm où la régularité dépend non pas de la position temporelle mais de la valeur du processus. En d’autres termes, la régularité n’est pas

déterminée par une fonction  $H$ , mais par une relation fonctionnelle entre le processus  $Z$  et sa régularité  $\alpha_Z$ , du type  $\alpha_Z = g(Z)$ .

La conséquence de cette approche est que la façon de maîtriser la régularité du processus ainsi obtenu est totalement différente. En effet, avec l'approche de type mBm qui spécifie une fonction  $t \rightarrow H(t)$ , on contrôle la régularité temporelle. Chaque réalisation est différente mais présente toujours les mêmes caractéristiques au même endroit. Les zones "lisses" et les zones "irrégulières" peuvent être clairement localisées. Si, par exemple, on peut disposer de plusieurs réalisations du phénomène, on pourra estimer la régularité de chacune d'entre elle, puis en faire une moyenne pour obtenir une estimation plus précise. Voici pour illustrer ces considérations, sur la figure 7, deux réalisations de mouvements Browniens multifractionnaires correspondant à une fonction  $H$  de type logistique, où l'on remarque qu'elles sont très similaires.

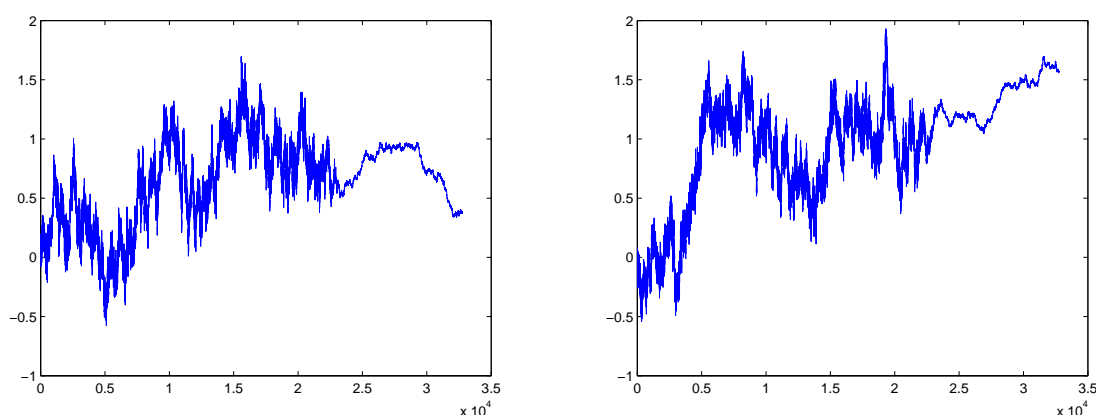


FIGURE 7 – Deux réalisations de mouvements Browniens multifractionnaires avec la même fonction  $H$

A contrario, dans le cas où on impose la relation entre l'amplitude du processus et sa régularité, on ne maîtrise plus la régularité temporelle d'une réalisation donnée. Pour simplifier, si la fonction  $g$  est l'identité (c'est-à-dire que le processus est égal à son propre exposant de Hölder en tout point) alors on peut juste assurer que plus la valeur du processus en un point sera élevée, plus il sera lisse en ce point, et inversement. Par contre, deux réalisations du même processus auront en général des apparences très différentes comme on l'observe sur la figure 8, c'est-à-dire des régularités très différentes en un même point.

#### 4.0.1 Définition et propriétés

Notre but est ici de définir un processus  $Z$  tel qu'en tout point  $t$ , et pour presque tout  $\omega$ ,  $Z$  et son exposant de Hölder  $\alpha_Z$  soient liés par une relation fonctionnelle (déterministe) :

$$\alpha_Z(t, \omega) = g(Z(t, \omega))$$

où  $g$  est une fonction  $k_g$ -Lipschitzienne définie sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  et à valeurs dans  $[a, b] \subset (0, 1)$ .

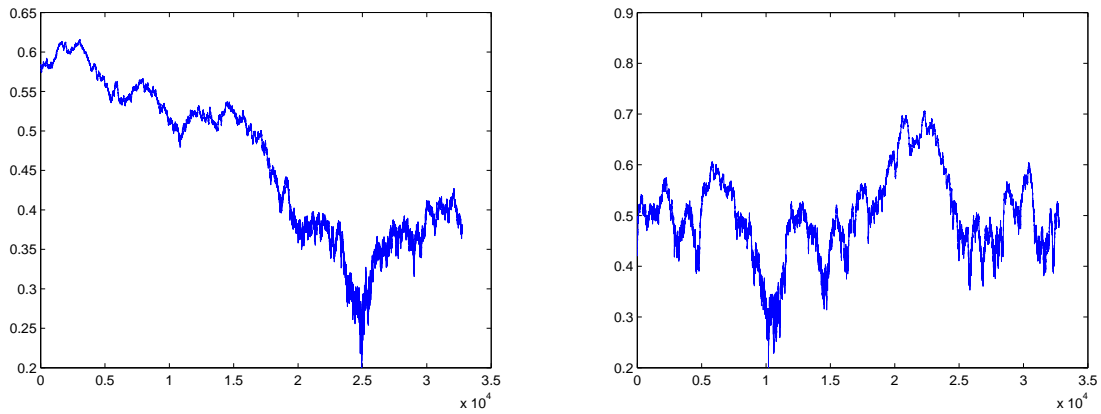


FIGURE 8 – Deux réalisations de processus auto-régulés avec la même fonction  $g$  (l'identité).

Afin de simplifier les notations, nous introduisons un nouvel opérateur : soit  $X \mapsto \overline{X}_{\alpha'}^{\beta'}$  l'opérateur (stochastique) qui "remet à l'échelle" un champ continu  $X$  non constant défini sur le compact  $K$  afin qu'il soit compris entre  $\alpha'$  et  $\beta'$  par une transformation affine :

$$\overline{X}_{\alpha'}^{\beta'} = \alpha' + (\beta' - \alpha') \frac{X - \min_K(X)}{\max_K(X) - \min_K(X)}$$

Nous avons aussi besoin pour définir ce processus d'un champ Gaussien de mouvement Browniens fractionnaires, noté  $\{B_H(t, \omega)\}_{(t,H) \in [0,1] \times [a,b]}$  et représenté sur la figure 9. Pour tout  $(t, H) \in [0,1] \times [a,b]$  (où  $[a,b] \subset (0,1)$ ), ce champ est tel que pour toute valeur  $H \in [a,b]$  fixée,  $t \mapsto B_H(t)$  est un fBm de paramètre de Hurst  $H$  défini sur  $[0,1]$ .

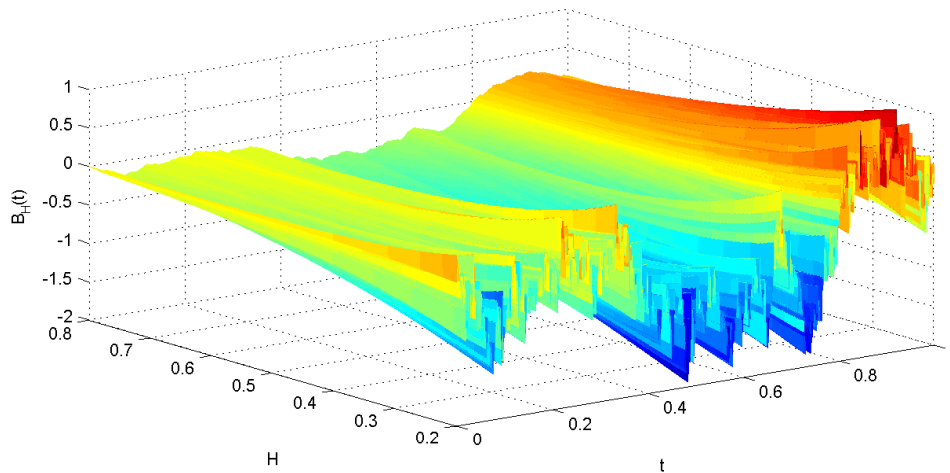


FIGURE 9 – Champ Gaussien de mouvement Browniens fractionnaires

Soient  $\alpha'(\omega)$  et  $\beta'(\omega)$  deux variables aléatoires, telles que  $\alpha \leq \alpha'(\omega) < \beta'(\omega) \leq \beta$ .

L'opérateur stochastique  $\Lambda_{\alpha', \beta'}$  est défini presque sûrement par :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha', \beta'} : \mathcal{C}([0, 1], [\alpha, \beta]) &\rightarrow \mathcal{C}([0, 1], [\alpha', \beta']) \\ Z &\mapsto \overline{B_{g(Z)}(\omega)}_{\alpha'}^{\beta'} \end{aligned}$$

où  $B_{g(Z)}(\omega)$  désigne la fonction  $t \mapsto B_{g(Z(t))}(t, \omega)$ . La fonction  $g$  est continue, et la continuité presque sûre du champ de fBms assure que l'image par  $\Lambda_{\alpha', \beta'}$  d'une fonction continue est une fonction continue. Grâce à la remise à l'échelle, cette fonction est à valeurs dans  $[\alpha', \beta']$  et donc dans  $[\alpha, \beta]$ , et  $\Lambda_{\alpha', \beta'}$  est bien défini sur un ensemble  $\Omega_1^*$  de probabilité un.

**Proposition 1.** *Pour tout  $\omega \in \Omega_1^*$ , il existe  $\alpha'(\omega)$  et  $\beta'(\omega)$  tels que  $[\alpha'(\omega), \beta'(\omega)] \subset [\alpha, \beta]$  et*

$$\mathcal{H} : \quad \beta'(\omega) - \alpha'(\omega) < \frac{\max_{(t,H) \in [0,1] \times [a,b]} (B_H(t, \omega)) - \min_{(t,H) \in [0,1] \times [a,b]} (B_H(t, \omega))}{\tilde{C}_2(\omega) k_g}.$$

Sous cette condition  $\mathcal{H}$ ,  $\Lambda_{\alpha'(\omega), \beta'(\omega)}$  possède un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction  $t \rightarrow Z^*(t, \omega)$  vérifiant :

$$Z^*(\omega) = \overline{B_{g(Z^*(\omega))}(\omega)}_{\alpha'(\omega)}^{\beta'(\omega)}$$

*Elements de preuve :* L'ensemble des fonctions continues de  $[0, 1]$  vers  $[\alpha, \beta]$  est un espace métrique complet quand il est muni de la norme infinie. Par conséquent, il reste à démontrer pour appliquer le théorème de Banach que  $\Lambda_{\alpha', \beta'}$  est contractante, ce que la condition  $\mathcal{H}$  permet d'assurer. Voir [5] pour plus de détails.  $\square$

Nous appelons processus auto-régulé multifractionnaire (PARM) paramétré par la fonction  $g$ , et nous notons  $Z_g$ , l'unique point fixe  $Z^*$  de  $\Lambda_{\alpha'(\omega), \beta'(\omega)}$ . On remarque que dans le cas où la fonction  $g$  est constante égale à  $H \in [a, b]$ , le PARM se résume à un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre  $H$ , recadré entre  $\alpha'$  et  $\beta'$ .

**Théorème 1.** *Pour tout  $\omega \in \Omega_1^*$ , le PARM  $Z_g$  vérifie pour tout  $t \in [0, 1]$  :*

$$\alpha_{Z_g}(t, \omega) = g(Z_g(t, \omega))$$

*Elements de preuve :* L'idée est de réutiliser le théorème 3.1 de [3], qui démontre dans le cas des MPRE que pour tout  $t_0 \in [0, 1]$ , presque sûrement,  $\alpha_Z(t_0, \omega) = S(t_0, \omega)$ . On ne peut cependant pas appliquer directement ce résultat car il suppose que la condition  $\mathcal{C}$  est vérifiée (voir inégalité (1)), ce qui est faux dans notre cas.

Cependant, en mettant à profit les propriétés du point fixe ainsi que la condition  $\mathcal{H}$ , on peut redémontrer les différents lemmes menant à ce théorème sans se servir de l'hypothèse  $\mathcal{C}$  et ainsi conclure.  $\square$

#### 4.0.2 Estimation de la fonction $g$

On cherche ici à estimer la relation fonctionnelle entre un processus auto régulé multifractionnaire  $Z_g$ , et sa régularité  $\alpha_{Z_g}$ . Obtenir une méthode théoriquement fondée pour l'estimation

de  $g$  est délicat, étant donné que la loi du PARM n'est pas connue actuellement. Nous présentons donc ici uniquement une méthode empirique préliminaire. Nous nous plaçons pour cela dans l'espace des phases  $(Z, \alpha_Z)$ . Dans cet espace, nous pouvons représenter la fonction  $g$  en fonction de la variable  $Z$ .

On en déduit alors une technique empirique d'estimation en quatre étapes, valable pour un processus  $Z_g$  discrétisé sur  $N$  points, et illustrée par la figure 10 :

- La première étape consiste à estimer la régularité de  $Z_g$  en tout point, mesurée par l'exposant de Hölder.
- Pour tout point  $t$ , on dispose alors d'un couple  $(Z(t), \alpha_Z(t))$ , que l'on représente dans l'espace des phases. On peut alors construire un histogramme bidimensionnel de ces  $N$  points.
- On cherche alors la ligne de crête (ou ligne de partage des eaux) de cet histogramme, c'est-à-dire l'ensemble des maxima locaux, en imposant de plus que le gradient soit supérieur à un certain seuil.
- Enfin, on fait passer une spline interpolatrice dans le nuage de points ainsi obtenus.

#### 4.0.3 Processus Auto Régulé Multifractionnaire avec forme prescrite

Le processus auto régulé tel qu'il a été décrit n'est paramétré que par la fonction  $g$ , telle que pour tout  $t$  et presque tout  $\omega$ ,  $\alpha_{Z_g}(t, \omega) = g(Z_g(t, \omega))$ . Ainsi, sa forme globale n'est déterminée que par la graine aléatoire  $\omega$ , et ne peut donc pas du tout être maîtrisée. Dans le but d'utiliser ce processus pour modéliser des données réelles, on doit être capable de contrôler sa tendance. Ceci ne peut pas être fait, comme dans le cas du mBm, en multipliant le processus par une fonction déterministe lisse  $G$ . Une approche fructueuse consiste à ajouter, dans la définition du processus, une "fonction de forme", notée  $s$ , ainsi qu'un paramètre de mélange,  $m$ , afin de moduler l'effet de la tendance. Plus précisément :

- soit  $s$  une fonction dérivable de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ ,
- soit  $m$  un réel strictement positif,
- soit  $B_H^{(s)}$  une modification de  $\{B_H(t)\}_{(H,t) \in [a,b] \times [0,1]}$ , le champ Gaussien de mouvements Browniens fractionnaires qui dépend de  $t$  et  $H$ , défini par :

$$B_H^{(s)}(t, \omega) = \overline{B_H(t, \omega)}_{\substack{\sup_{t \in [0,1]} (s(t)) \\ \inf_{t \in [0,1]} (s(t))}} + ms(t).$$

La modification apportée à  $B$  consiste en une remise à l'échelle pour le rendre "compatible avec  $s$ ", suivie de l'ajout de la fonction  $s$ , modulé par  $m$ . Cet ajout d'une fonction déterministe dérivable à un champ stochastique permet de lui donner une forme, sans altérer ses propriétés de régularité.

Soient  $\alpha'(\omega)$  et  $\beta'(\omega)$  deux variables aléatoires, telles que  $\alpha \leq \alpha'(\omega) < \beta'(\omega) \leq \beta$ . L'opérateur stochastique  $\Lambda_{\alpha', \beta'}^{(s)}$  est défini pour tout  $\omega \in \Omega_1^{(s*)}$  (de probabilité 1) par :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha', \beta'}^{(s)} : \mathcal{C}([0, 1], [\alpha, \beta]) &\rightarrow \mathcal{C}([0, 1], [\alpha, \beta]) \\ Z &\mapsto \overline{B_{g(Z)}^{(s)}(\omega)}_{\alpha'} \end{aligned}$$

où  $B_{g(Z)}^{(s)}(\omega)$  désigne la fonction  $t \mapsto B_{g(Z(t))}^{(s)}(t, \omega)$ .

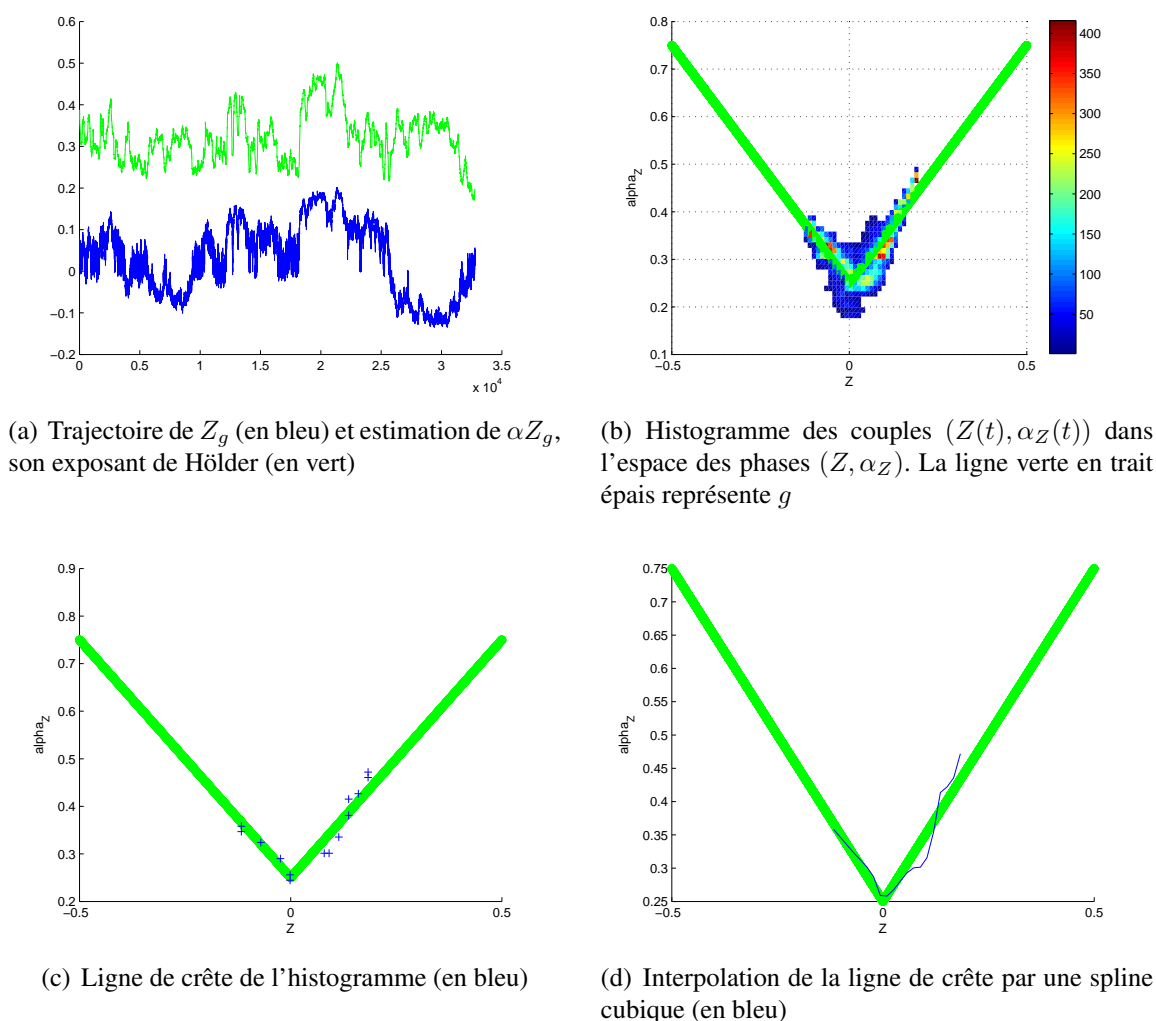


FIGURE 10 – Estimation de  $g(Z) = |Z| + 1/4$  définie sur  $[-1/2, 1/2]$  pour une réalisation d'un PARM  $Z_g$  de 32768 points

On montre que sous une condition  $\mathcal{H}^{(s)}$  similaire à  $\mathcal{H}$  cet opérateur est contractant. Dès lors, on appelle processus auto-régulé multifractionnaire paramétré par la fonction  $g$  avec fonction de forme  $s$ , et on note  $Z_g^{(s)}$ , l'unique point fixe  $Z^*$  de  $\Lambda_{\alpha'(s)(\omega), \beta'(s)(\omega)}^{(s)}$ .

L'utilisation du théorème du point fixe d'une application contractante fournit non seulement l'existence et l'unicité de la solution  $Z^*$ , mais également un algorithme de synthèse de ce point fixe en appliquant la méthode des itérations successives.

La fonction de forme remplit un double objectif. Tout d'abord, elle permet de contrôler la forme du processus auto-régulé  $Z$  : quand  $m$  est grand,  $Z$  et  $s$  ont essentiellement la même forme. Ensuite, le fait que la propriété de régularité soit conservée permet de décider où le processus sera irrégulier et où il sera lisse. On remarque sur la figure 11 que la relation entre la valeur du processus et sa régularité est parfaitement conservée alors que son allure générale est imposée par la fonction de forme.

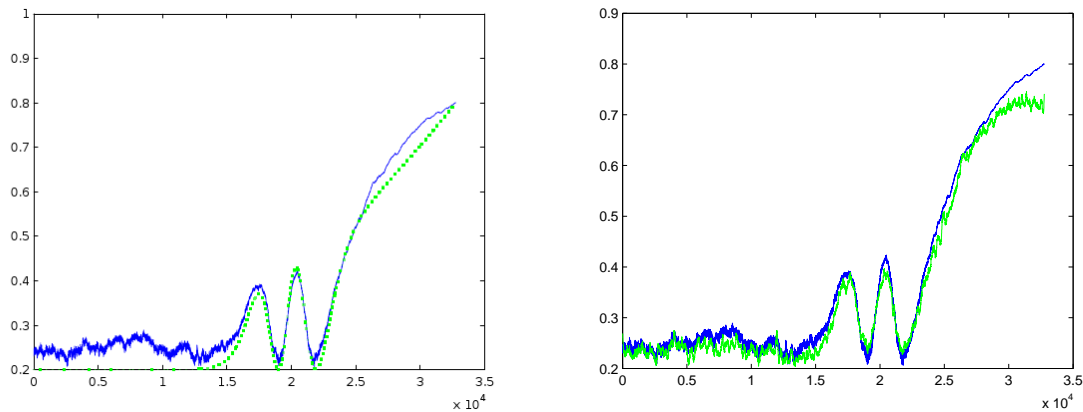


FIGURE 11 – A gauche, un PARM paramétré par  $g(Z) = Z$  (en bleu) et sa fonction de forme (en pointillés verts). A droite, le même PARM et son exposant de Hölder estimé (en vert).

## 5 Synthèse d'intervalles RR

Pour pouvoir utiliser le PARM avec forme prescrite comme modèle pour les intervalles RR, nous avons besoin d'identifier les éléments suivants :

- une fonction "g" dont le rôle est d'assurer la relation entre le rythme cardiaque et sa régularité Höldérienne,
- une fonction "s" qui impose "doucement" une forme, afin de prendre en compte en particulier l'alternance jour/nuit.

Nous avons présenté plus haut une méthode empirique d'estimation de la fonction  $g$  en se plaçant dans l'espace des phases. Afin de quantifier la symétrie très visible à "l'oeil" entre les intervalles interbattements et leurs exposants, nous nous sommes donc placé dans le plan  $(RRi, \hat{H})$ . La figure 12 représente l'histogramme obtenu pour un patient, ainsi que la ligne de crête interpolée. L'histogramme et la ligne de crête faisant apparaître clairement une droite, nous avons donc cherché dans une première approche une relation linéaire entre l'exposant  $H$  et le signal  $RRi$  de la forme  $RRi = aH + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels. Pour ce faire, nous avons pour chaque couple  $\{RRi, H\}$  obtenu par une méthode d'optimisation numérique les valeurs de  $a$  et  $b$  minimisant la norme  $\|RRi - (aH + b)\|$ . Cependant, à cause de la nature très bruitée de  $RRi$  et de  $H$ , les résultats obtenus n'étaient pas satisfaisants dans tous les cas. Nous avons alors extrait du signal et de son exposant leurs tendances en utilisant des splines interpolatrices, que nous avons notées  $\check{RRi}$  et de  $\check{H}$ , avant de minimiser la norme de la différence  $\|\check{RRi} - (a\check{H} + b)\|$ . La figure 13 représente deux séries de  $RRi$  (en bleu), pour lesquelles on a estimé la régularité (en vert). Nous avons alors pris leurs tendances, et obtenu les valeurs de  $a$  et  $b$  permettant le meilleur ajustement. En bas sont représentées  $\check{RRi}$ , la tendance du  $RRi$  (en bleu), puis  $a\check{H} + b$ , où  $\check{H}$  est la tendance de  $H$ .

En appliquant ce procédé à l'ensemble des patients, on obtient les moyennes et écart-types suivants :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= -2.4650 & \sigma_a &= 1.0775 \\ \bar{b} &= 1.2286 & \sigma_b &= 0.1662. \end{aligned}$$

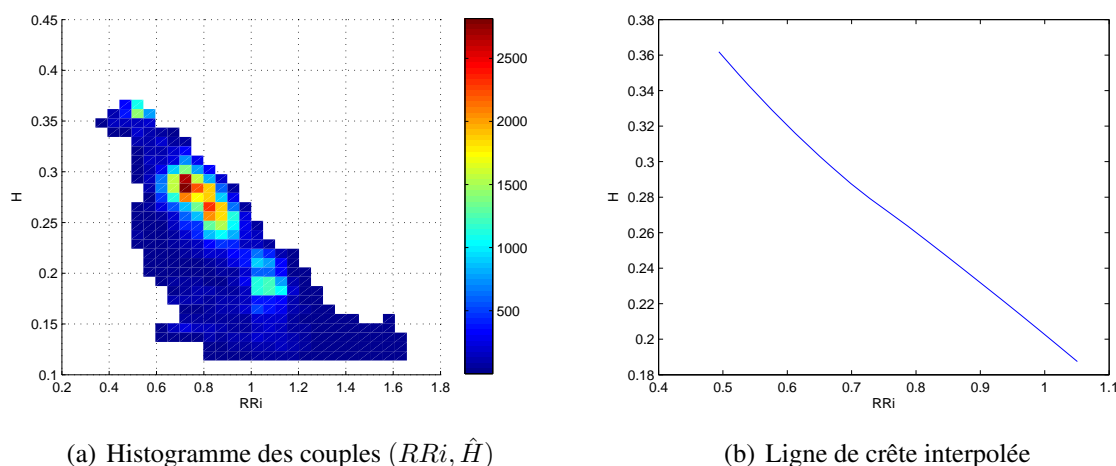


FIGURE 12 – Estimation de la relation entre le signal  $R Ri$  et son exposant de Hölder dans l'espace des phases  $(R Ri, \hat{H})$ .

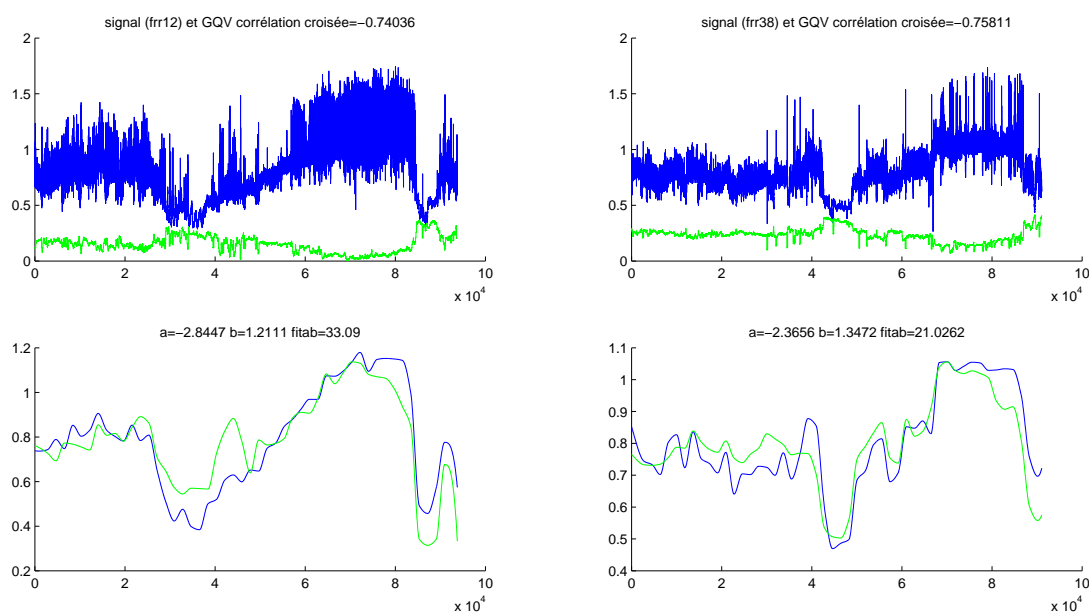


FIGURE 13 – Relation linéaire entre l'exposant  $H$  et le signal  $R Ri$  de la forme  $R Ri = aH + b$

En observant l'histogramme des intervalles interbattements au cours d'une journée, on remarque dans la plupart des cas une double bosse, typique d'une loi bimodale. Les deux modes correspondent aux valeurs moyennes des intervalles interbattements durant la période d'éveil (valeur la plus faible, fréquence cardiaque rapide) et la période de sommeil (valeur la plus élevée, fréquence cardiaque plus lente). Cette allure bimodale se retrouve également au niveau de l'histogramme de l'exposant pour lequel on observe un premier mode autour de 0.25 correspondant à l'exposant de Hölder d'éveil, et un second mode autour de 0.15 correspondant à



l'exposant de Hölder de sommeil.

Nous avons donc pris comme modèle un mélange de deux Gaussiennes, paramétrées par  $\mu_1$  et  $\sigma_1$  pour la première et  $\mu_2$  et  $\sigma_2$  pour la seconde, avec des poids respectifs de  $p$  et  $1 - p$ . Pour chacune des séries de  $RRi$ , nous avons cherché à inférer les paramètres de cette distribution de probabilité à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. La figure 14 illustre les résultats obtenus sur un exemple de  $RRi$ . En haut sont toujours représentés la série des  $RRi$  (en bleu) et sa régularité Höldérienne (en vert). Juste en dessous se trouve l'histogramme des  $RRi$ , ainsi que les paramètres  $p, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$  du mélange Gaussien le plus vraisemblable, que l'on a superposé à l'histogramme. Enfin, l'histogramme de la régularité des  $RRi$ , avec ses paramètres identifiés pour le même modèle bimodal.

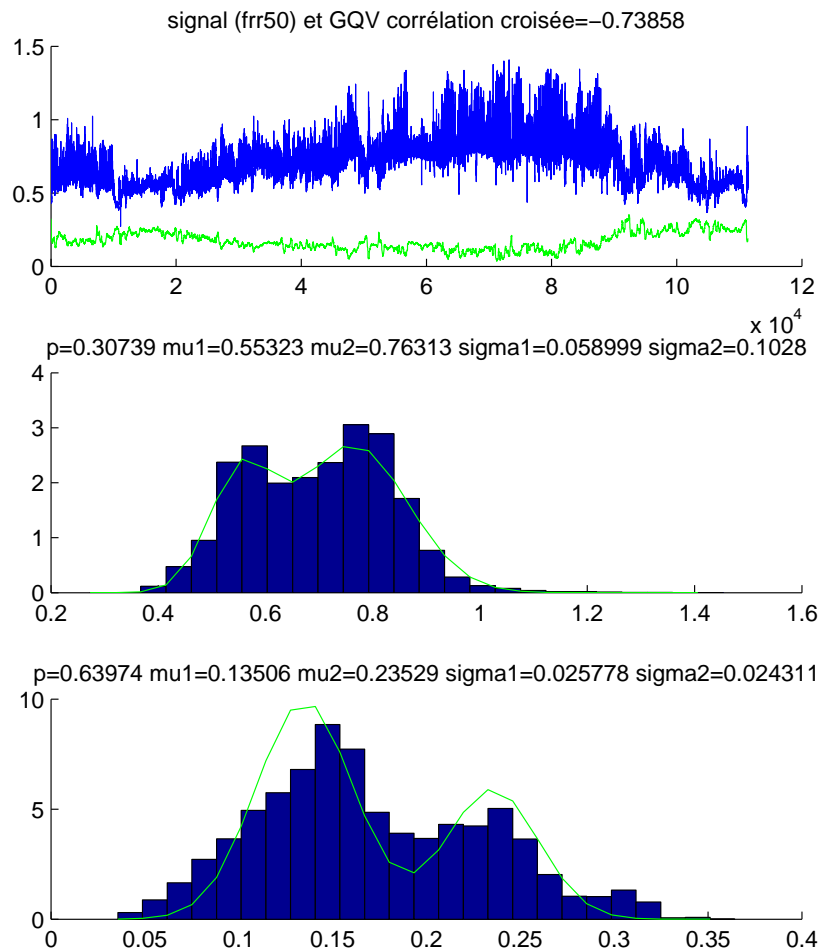


FIGURE 14 – Histogrammes des intervalles interbattements et de leur régularité Höldérienne, modélisés comme le mélange de deux Gaussiennes

Le tableau 1 récapitule les moyennes et écart-types des différents modes identifiés :

Voici les paramètres que nous avons finalement retenus :

- une fonction linéaire entre l'exposant  $H$  et le signal  $RRi$  :  $RRi = aH + b$  avec  $a$  choisi dans l'intervalle  $[\bar{a} - \sigma_a, \bar{a} + \sigma_a] = [-3.5425, -1.3875]$  et  $b$  choisi dans l'inter-

RRi	moyenne	écart-type	H	moyenne	écart-type
$\mu_1$	0.6981	0.0963	$\mu_1$	0.1685	0.0570
$\mu_2$	0.9135	0.1396	$\mu_2$	0.2439	0.0684

TABLEAU 1 – Moyennes et écart-types des modes des distributions bimodales des RRI et de leur régularité

valle  $[\bar{b} - \sigma_b, \bar{b} + \sigma_b] = [1.0624, 1.3948]$ , où les moyennes et écart-types de  $a$  et  $b$  ont été inférés à partir des RRI dont nous disposons.

- une fonction  $s$  prescrivant le cycle nycthéral. Cette fonction est construite à partir de splines interpolatrices, représentée sur la figure 15 et réglée par les paramètres suivants :
  - $D_n$ , la durée de la nuit :  $D_n \in [6, 10]$
  - $D_j$ , la durée du jour :  $D_j = 24 - D_n$
  - $D_m$ , la durée du début de la mesure (après le réveil) :  $D_m \in [2, 4]$
  - $D_s$ , la durée nécessaire pour trouver le sommeil :  $D_s \in [0.5, 1.5]$
  - $D_r$ , la durée nécessaire pour se réveiller :  $D_r \in [0.5, 1.5]$
  - $RRi_j$ , l'intervalle interbattement moyen pendant la journée :  
 $RRi_j \in [\bar{m}u_1 - \sigma_{mu_1}, \bar{m}u_1 + \sigma_{mu_1}] = [0.6018, 0.7944]$ , où  $\mu_1$  est le premier mode inféré des RRI.
  - $RRi_n$ , l'intervalle interbattement moyen pendant la nuit :  
 $RRi_n \in [\bar{m}u_2 - \sigma_{mu_2}, \bar{m}u_2 + \sigma_{mu_2}] = [0.7739, 1.0531]$ , où  $\mu_2$  est le second mode inféré des RRI.

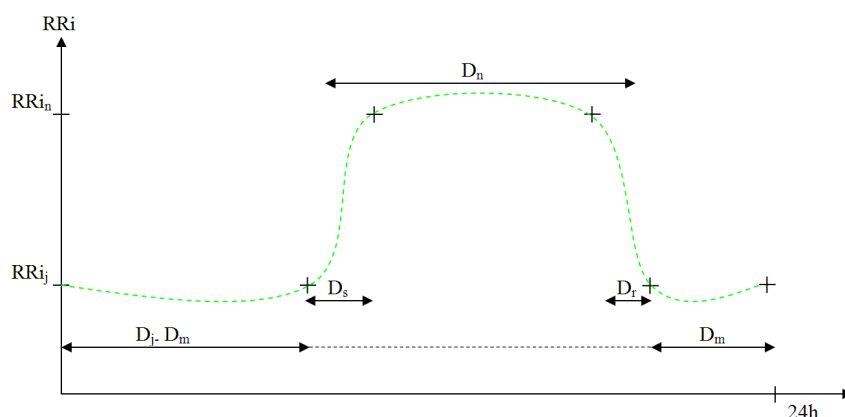


FIGURE 15 – Fonction de forme des intervalles interbattements

- deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , entre lesquels le champ de fBms sera remis à l'échelle. La régularité du processus généré sera comprise entre ces deux valeurs. Nous prendrons  $\alpha$  dans l'intervalle  $[\bar{m}u_1 - \sigma_{mu_1}, \bar{m}u_1 + \sigma_{mu_1}] = [0.1115, 0.2255]$  et  $\beta$  dans l'intervalle  $[\bar{m}u_2 - \sigma_{mu_2}, \bar{m}u_2 + \sigma_{mu_2}] = [0.1755, 0.3123]$  où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les deux modes inférés de la régularité des RRI.

L'étape finale consiste à synthétiser des PARM avec de telles fonction de forme  $s$  et fonction de régularité  $g$ , pour divers jeux de paramètres dans les gammes proposées. Des exemples de

trajectoires ainsi obtenues sont représentées sur la figure 16, à comparer avec la figure 6 qui représente de vraies séries d'intervalles RR.

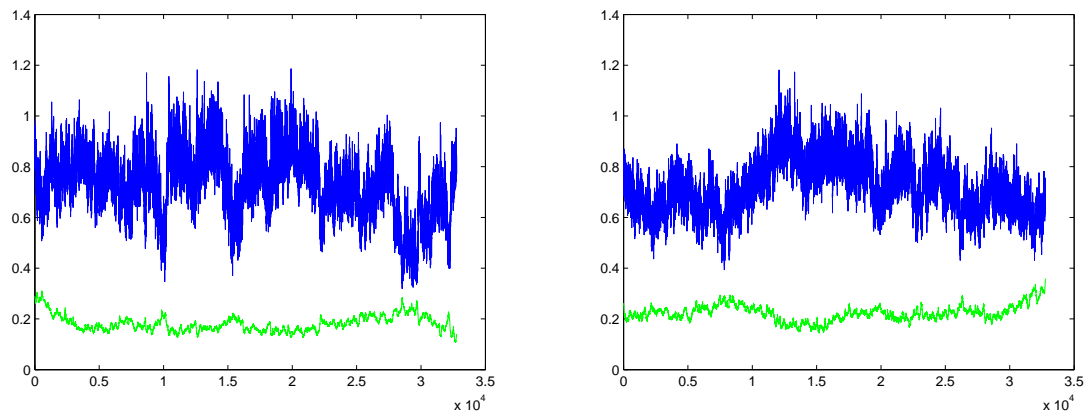


FIGURE 16 – Deux séries d'intervalles RR synthétisés à partir d'un PARM (en bleu) et leur régularité estimée (en vert).

## 6 Conclusion et perspectives

Grâce à une analyse précise de la régularité locale des intervalles interbattements cardiaques, nous avons décelé une propriété restée inaperçue jusqu'ici : leur exposant de Hölder et leur amplitude varient typiquement en sens opposé et de façon approximativement linéaire. Nous avons construit un modèle phénoménologique pour prendre en compte ce fait, en introduisant un nouveau processus stochastique appelé Processus Auto-Régulé Multifractionnaire.

Le PARM ouvre un nouveau champ d'études théoriques dans le domaine des processus à régularité prescrite. De nombreuses questions se posent : obtention de la loi du PARM, de ses principales propriétés probabilistes et statistiques, propriétés multifractales, etc...

Dans le domaine des applications, des travaux futurs porteront sur l'explication en termes physiologiques de l'origine de cette relation entre  $\alpha$  et les valeurs des intervalles RR. Nous essaierons aussi de détecter si cette relation est affectée par diverses pathologies.

Enfin, d'autres perspectives concernent de nouvelles applications de ce processus. Nous avons en effet observé une relation entre les valeurs d'un phénomène et sa régularité sur diverses données (terrains, relevés de températures...). Nous pensons que le PARM pourrait modéliser de façon fine de nombreux phénomènes naturels irréguliers.

## Références

- [1] L. A. N. AMARAL, A. L. GOLDBERGER, P. C. IVANOV, H. E. STANLEY (1999). Modeling heart rate variability by stochastic feedback. *Computer Phys. Comm.* **121** :122,

126–128

- [2] AYACHE, A. AND LÉVY VÉHEL, J. (2004). On the identification of the pointwise Hölder exponent of a generalized multifractional Brownian motion. *SPA* **111**, 119–156.
- [3] AYACHE, A. AND TAQQU, M.S. (2005). Multifractional Processes with Random Exponent. *Publicacions Matemàtiques* **49**, 459–486.
- [4] AYACHE, A. AND COHEN, S. AND LÉVY VÉHEL, J. (2000). The covariance structure of multifractional Brownian motion, with application to long range dependence. *ICASSP*.
- [5] BARRIÈRE, O. (2007). Synthèse et estimation de mouvements Browniens multifractionnaires et autres processus à régularité prescrite. Définition du processus auto-régule multifractionnaire et applications. *Ph.D. Thesis, Univ. Nantes*.
- [6] BENASSI, A., JAFFARD, S. AND ROUX, D. (1997). Elliptic Gaussian random processes. *Rev. Matemàtica Iberoamericana*, vol. **13**, No 1, p. 19-90.
- [7] CHAN, G. AND WOOD, A. (1998). Simulation of multifractional Brownian motion. *Proc. Comput. Statist.* 233-238
- [8] FRACLAB : A fractal analysis toolbox for signal and image processing. <http://apis.saclay.inria.fr/FracLab/>
- [9] A. L. GOLDBERGER, L. A. N. AMARAL, J. M. HAUSDORFF, P. C. IVANOV, C.K. PENG, H. E. STANLEY (2002). Fractal dynamics in physiology : Alterations with disease and aging. *PNAS* **99**, 2466–2472.
- [10] C. IVANOV, L.AMARAL, A.L. GOLDBERGER, S. HAVLIN, M.G. ROSENBLUM, Z. R. STRUZIK, H. E.STANLEY (1999). Multifractality in human heartbeat dynamics. *Nature* **399**.
- [11] KOLMOGOROV A.N. (1940). Wienerische Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raume. *Doklady*, **26**, 115–118.
- [12] MANDELBROT, B.B. AND VAN NESS, J. (1968). Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Rev.* **10**, 422–437.
- [13] M. MEYERS, O. STIEDL AND B. KERMAN (2003). Discrimination by multifractal spectrum estimation of human heartbeat interval dynamics. *Fractals* **11-2**.
- [14] PELTIER, R.F. AND LÉVY VÉHEL, J. (1995). Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-2645.html>
- [15] PETERS, R. (1999). The Fractal Dimension of Atrial Fibrillation : A New Method to Predict Left Atrial Dimension from the Surface Electrocardiogram *Cardiology*, **92**(1), 17–20.
- [16] PHYSIONET : the research resource for complex physiologic signals. [www.physionet.org](http://www.physionet.org)
- [17] SENDE, J. (2003) Guide Pratique de l'ECG, *Edition Estem*
- [18] TU, C., ZENG, Y. AND YANG, X. (2004) Nonlinear processing and analysis of ECG data, *Technology and Health Care*, **12**(1), 1–9.